Kategorientheorie

Eine erste Einführungen mit vielen Anwendungen

Leon Schropp

LMU

14. Januar 2025

Ziel: Motivation, eine Reise durch die Mathematik und Anwendungen

Email: `leon.schropp@campus.lmu.de`

Was ist eine Kategorie?

Was ist eine Kategorie?

Wie kann man Dinge in Kategorien unterscheiden?

Historische Kategoriensysteme (Ontologie)

Aristoteles

Einteilung aller Dinge in Kategorien über 10 verschiedene Eigenschaftstypen z.B.

Substanz	Was ist etwas? z.B. Pferd, Stift, Begriff
Quantität	Wieviel/Wie groß? z.B. 1.5m, 5cm
Beschaffenheit	grau, sprachbegabt
Ort	auf dem Marktplatz

Historische Kategoriensysteme (Ontologie)

Aristoteles

Einteilung aller Dinge in Kategorien über 10 verschiedene Eigenschaftstypen z.B.

Substanz	Was ist etwas? z.B. Pferd, Stift, Begriff
Quantität	Wieviel/Wie groß? z.B. 1.5m, 5cm
Beschaffenheit	grau, sprachbegabt
Ort	auf dem Marktplatz

Kant

Ähnliche Einteilung, aber diesmal 4 Hauptunterscheidungstypen mit jeweils 3 Untertypen. Fügt Modalität hinzu.

Historische Kategoriensysteme (Ontologie)

Aristoteles

Einteilung aller Dinge in Kategorien über 10 verschiedene Eigenschaftstypen z.B.

Substanz	Was ist etwas? z.B. Pferd, Stift, Begriff
Quantität	Wieviel/Wie groß? z.B. 1.5m, 5cm
Beschaffenheit	grau, sprachbegabt
Ort	auf dem Marktplatz

Kant

Ähnliche Einteilung, aber diesmal 4 Hauptunterscheidungstypen mit jeweils 3 Untertypen. Fügt Modalität hinzu.

Weitere Anhänger

Edmund Husserl, Johannson, Chrisholm, E.J.Lowe

Fazit Kategoriensysteme

- Implizite Definition von Kategorien
- Einteilung "aller Dinge/Begriffe" in Kategorien im Vordergrund.

Probleme

Implizite Definitionen sind für die Mathematik unbrauchbar.

Fazit Kategoriensysteme

- Implizite Definition von Kategorien
- Einteilung "aller Dinge/Begriffe" in Kategorien im Vordergrund.

Probleme

Implizite Definitionen sind für die Mathematik unbrauchbar.

Interrelation (historische) Kategoriensysteme bieten keine Möglichkeit Beziehungen zwischen Kategorien anzugeben.

Fazit Kategoriensysteme

- Implizite Definition von Kategorien
- Einteilung "aller Dinge/Begriffe" in Kategorien im Vordergrund.

Probleme

Implizite Definitionen sind für die Mathematik unbrauchbar.

Interrelation (historische) Kategoriensysteme bieten keine Möglichkeit Beziehungen zwischen Kategorien anzugeben.

Vollständigkeit Bilden alle Kategorien zusammen auch eine Kategorie ?

Kategorien in der Moderne

Ziel

Kategorientheorie als "Mathematik mit mathematischen Objekten".

Was ist überhaupt Mathematik und was sind Mathematische Objekte?

Logik

Wie muss man Aussagen aufbauen, damit man entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind? Wie baut man Argumente auf? Wann ist ein Argument gültig?

Logik

Wie muss man Aussagen aufbauen, damit man entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind? Wie baut man Argumente auf? Wann ist ein Argument gültig?

- Ein Philosoph benutzt Logik um Fragen über die eigene Erfahrung in der realen Welt zu beantworten oder Theorien aufzustellen [Che22].

Logik

Wie muss man Aussagen aufbauen, damit man entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind? Wie baut man Argumente auf? Wann ist ein Argument gültig?

- Ein Philosoph benutzt Logik um Fragen über die eigene Erfahrung in der realen Welt zu beantworten oder Theorien aufzustellen [Che22].
- Wohlgeformte Argumente in einer Debatte sind genau nach den Regeln der Logik aufgebaut.

Logik

Wie muss man Aussagen aufbauen, damit man entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind? Wie baut man Argumente auf? Wann ist ein Argument gültig?

- Ein Philosoph benutzt Logik um Fragen über die eigene Erfahrung in der realen Welt zu beantworten oder Theorien aufzustellen [Che22].
- Wohlgeformte Argumente in einer Debatte sind genau nach den Regeln der Logik aufgebaut.

Abstraktion

Das kontrollierte Vergessen von Details [Che22].

Logik

Wie muss man Aussagen aufbauen, damit man entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind? Wie baut man Argumente auf? Wann ist ein Argument gültig?

- Ein Philosoph benutzt Logik um Fragen über die eigene Erfahrung in der realen Welt zu beantworten oder Theorien aufzustellen [Che22].
- Wohlgeformte Argumente in einer Debatte sind genau nach den Regeln der Logik aufgebaut.

Abstraktion

Das kontrollierte Vergessen von Details [Che22]. Das benutzen wir andauernd!

Bsp. Früchte

Zahlen sind abstrakte Objekte

Variablen abstrahieren Zahlen

Binäre Operationen

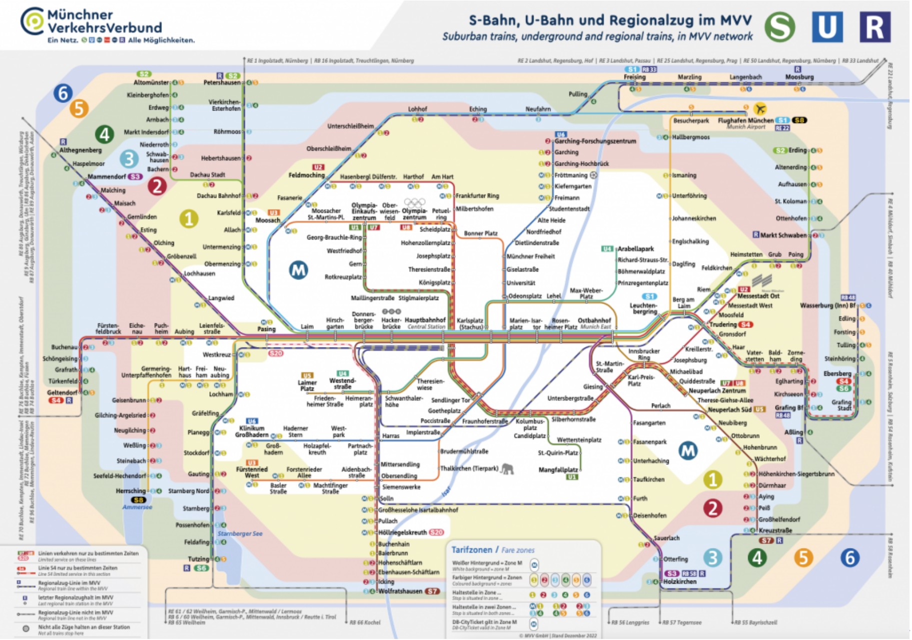
Fazit - Abstraktion

- Benutzen wir überall und ständig.

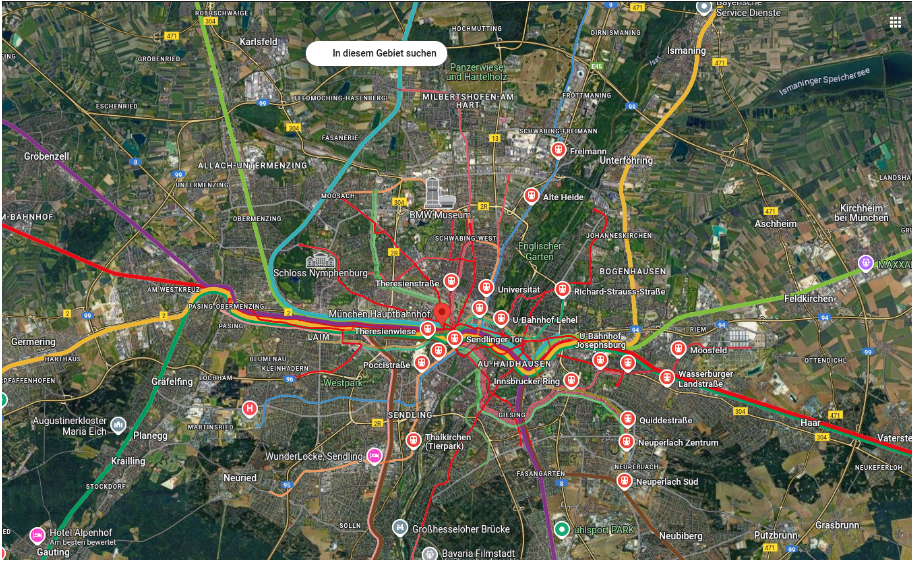
Fazit - Abstraktion

- Benutzen wir überall und ständig.
- Auf den richtigen Grad an Abstraktion kommt es an!

Ubahn-Linien



Ubahn-Linien



Was ist die höchste Ebene an Abstraktion, die ihr bisher kennengelernt habt?

Was ist die höchste Ebene an Abstraktion, die ihr bisher kennengelernt habt?

Mengen als Kategorien?

Was ist die höchste Ebene an Abstraktion, die ihr bisher kennengelernt habt?

Mengen als Kategorien?

Implizite Definitionen ✓ Zermelo-Franklin-Mengenlehre (ZFC)

Was ist die höchste Ebene an Abstraktion, die ihr bisher kennengelernt habt?

Mengen als Kategorien?

Implizite Definitionen ✓ Zermelo-Franklin-Mengenlehre (ZFC)

Interrelation Jein.

Was ist die höchste Ebene an Abstraktion, die ihr bisher kennengelernt habt?

Mengen als Kategorien?

Implizite Definitionen ✓ Zermelo-Franklin-Mengenlehre (ZFC)

Interrelation Jein.

Vollständigkeit Bilden alle Mengen eine Menge ?

Russell's Paradoxon

Angenommen jede Sammlung von Mengen ist wieder eine Menge.
Sei $\mathcal{R}$ die Menge gegeben durch: $\mathcal{R} := \{x \in R | x \notin x\}$.

Russell's Paradoxon

Angenommen jede Sammlung von Mengen ist wieder eine Menge.
Sei $\mathcal{R}$ die Menge gegeben durch: $\mathcal{R} := \{x \in R | x \notin x\}$.

Frage: Enthält die Menge $\mathcal{R}$ auch $\mathcal{R}$?

Antwort auf Russell's Paradoxon

Skizze einer Definition

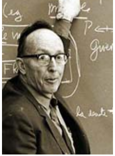
- Eine (1-)Klasse ist eine Sammlung von Mengen.
  Eine 1-Klasse kann, aber muss keine Menge sein.
  Die Sammlung aller Mengen ist eine 1-Klasse, aber keine Menge.

Antwort auf Russell's Paradoxon

Skizze einer Definition

- Eine (1-)Klasse ist eine Sammlung von Mengen.
  Eine 1-Klasse kann, aber muss keine Menge sein.
  Die Sammlung aller Mengen ist eine 1-Klasse, aber keine Menge.
- Eine 2-Klasse ist eine Sammlung von 1-Klassen.
  Eine 2-Klasse kann, aber muss keine 1-Klasse sein.
  Die Sammlung aller 1-Klassen ist eine 2-Klasse, aber keine 1-Klasse.
- usw..

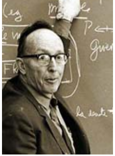
Kategorien in der Mathematik



Definition (Eilenberg-MacLane 1942)

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten zusammen mit einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von Abbildungen für jedes Paar von Objekten $A, B \in \mathcal{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

Kategorien in der Mathematik



Definition (Eilenberg-MacLane 1942)

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten zusammen mit einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von Abbildungen für jedes Paar von Objekten $A, B \in \mathcal{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Man kann Abbildungen verknüpfen,
d.h. für Objekte $A, B, C \in \mathcal{C}$ und Abbildungen
$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ gibt es $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$.

Verknüpfung von Abbildungen

Kategorien in der Mathematik

Definition (Eilenberg-MacLane 1942)

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten zusammen mit einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von Abbildungen für jedes Paar von Objekten $A, B \in \mathcal{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Man kann Abbildungen verknüpfen,
d.h. für Objekte $A, B, C \in \mathcal{C}$ und Abbildungen
$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ gibt es $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$. 2. die

Verknüpfung ist assoziativ,
d.h. es muss gelten: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Assoziativität

Kategorien in der Mathematik

Definition (Eilenberg-MacLane 1942)

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten zusammen mit einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von Abbildungen für jedes Paar von Objekten $A, B \in \mathcal{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Man kann Abbildungen verknüpfen,
d.h. für Objekte $A, B, C \in \mathcal{C}$ und Abbildungen
$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ gibt es $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$.

2. die Verknüpfung ist assoziativ,
d.h. es muss gelten: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

3. Es gibt Identitätsabbildungen,
d.h. für jedes $A \in \mathcal{C}$ gibt es ein $id_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, sodass für alle
$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ gilt: $f \circ id_A = id_A = id_A \circ f$.

Identität

Beispiele:

"So gut wie fast alles ist eine Kategorie."

- Die natürlichen Zahlen bilden eine Kategorie $\mathbb{N}$.

Beispiele:

"So gut wie fast alles ist eine Kategorie."

- Die natürlichen Zahlen bilden eine Kategorie $\mathbb{N}$.
  Gilt das auch für $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$?
- Eine Menge C ist eine Kategorie mit $\mathrm{Hom}(A, A) = id_A$ und $\mathrm{Hom}(A, B) = \emptyset$, wenn $A \neq B$.

Beispiele:

"So gut wie fast alles ist eine Kategorie."

- Die natürlichen Zahlen bilden eine Kategorie $\mathbb{N}$.
  Gilt das auch für $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$?
- Eine Menge C ist eine Kategorie mit $\mathrm{Hom}(A, A) = id_A$ und $\mathrm{Hom}(A, B) = \emptyset$, wenn $A \neq B$.
- Alle Mengen zusammen bilden eine Kategorie **Set**. Die Abbildungen sind alle möglichen Zuordnungen von Elementen.

Nicht-mathematische Beispiele:

- Lebewesen und Abstammung.

Nicht-mathematische Beispiele:

- Lebewesen und Abstammung.
- Datentypen von Programmiersprachen.

Welche Kategorien fallen euch noch ein?

Erkennen von Strukturen - Ordnungen

Definition (Präordnung)

Eine Präordnung auf einer Menge M ist eine Binäre Relation $\leq$ mit den Eigenschaften

Reflexivität $x \leq x$ für alle $x \in M$.

Transitivität Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann gilt auch $x \leq z$ und das für beliebige $x, y, z \in M$.

Erkennen von Strukturen - Ordnungen

Definition (Präordnung)

Eine Präordnung auf einer Menge M ist eine Binäre Relation $\leq$ mit den Eigenschaften

Reflexivität $x \leq x$ für alle $x \in M$.

Transitivität Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann gilt auch $x \leq z$ und das für beliebige $x, y, z \in M$.

Beispiele:

- $\leq$ ist eine Präordnung auf $\mathbb{N}$.

Erkennen von Strukturen - Ordnungen

Definition (Präordnung)

Eine Präordnung auf einer Menge M ist eine Binäre Relation $\leq$ mit den Eigenschaften

Reflexivität $x \leq x$ für alle $x \in M$.

Transitivität Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann gilt auch $x \leq z$ und das für beliebige $x, y, z \in M$.

Beispiele:

- $\leq$ ist eine Präordnung auf $\mathbb{N}$.
  Gilt das auch für $\mathbb{Z}$ usw. ?

Erkennen von Strukturen - Ordnungen

Definition (Präordnung)

Eine Präordnung auf einer Menge M ist eine Binäre Relation $\leq$ mit den Eigenschaften

Reflexivität $x \leq x$ für alle $x \in M$.

Transitivität Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann gilt auch $x \leq z$ und das für beliebige $x, y, z \in M$.

Beispiele:

- $\leq$ ist eine Präordnung auf $\mathbb{N}$.
  Gilt das auch für $\mathbb{Z}$ usw. ?
- Jedem gerichteten Graph kann eine Präordnung gegeben werden.

Erkennen von Strukturen - Ordnungen

Definition (Präordnung)

Eine Präordnung auf einer Menge M ist eine Binäre Relation $\leq$ mit den Eigenschaften

Reflexivität $x \leq x$ für alle $x \in M$.

Transitivität Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann gilt auch $x \leq z$ und das für beliebige $x, y, z \in M$.

Beispiele:

- $\leq$ ist eine Präordnung auf $\mathbb{N}$.
  Gilt das auch für $\mathbb{Z}$ usw. ?
- Jedem gerichteten Graph kann eine Präordnung gegeben werden.
- Jeder Menge können zwei "Dummy" Präordnungen gegeben werden.

Erkennen von Strukturen - Ordnungen

Definition (Präordnung)

Eine Präordnung auf einer Menge M ist eine Binäre Relation $\leq$ mit den Eigenschaften

Reflexivität $x \leq x$ für alle $x \in M$.

Transitivität Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann gilt auch $x \leq z$ und das für beliebige $x, y, z \in M$.

Beispiele:

- $\leq$ ist eine Präordnung auf $\mathbb{N}$.
  Gilt das auch für $\mathbb{Z}$ usw. ?
- Jedem gerichteten Graph kann eine Präordnung gegeben werden.
- Jeder Menge können zwei "Dummy" Präordnungen gegeben werden.

Beobachtung

Eine Präordnung ist das gleiche, wie eine (kleine) Kategorie mit höchstens einer Abbildung zwischen je zwei verschiedenen Objekten.

Anwendungen

Cheng: Kategorientheorie als universell einsetzbare Modelsprache [Che22]

Anwendungen

Cheng: Kategorientheorie als universell einsetzbare Modelsprache [Che22]
Besser: Jeder Graph bildet eine Kategorie!

Anwendungen - Informatik

Können wir $\mathbb{N}$ noch einfacher konstruieren? Wer findet eine Kategorie mit der kleinsten Anzahl an Objekten, die $\mathbb{N}$ wiedergibt?

Freie Kategorien

"Jeder gerichtete Graph erzeugt eine Kategorie"

Freie Kategorien

"Jeder gerichtete Graph erzeugt eine Kategorie"

Definition

Sei **G** ein Graph mit einer Menge von Knotenpunkten E und einer Menge von Pfeilen P.
Wir definieren die Kategorie $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ als die Kategorie mit Objekten E und Abbildungen gegeben durch das Aneinanderreihen von Pfeilen aus P mit kompatiblen Start und Ziel. Für jedes Objekt $e \in E$ geben wir einen "leeren" Pfeil id_e.

Anwendung - Funktionale Programmierung

- Programmiersprachen, die Funktionen als vordefinierte Datentypen haben.

Anwendung - Funktionale Programmierung

- Programmiersprachen, die Funktionen als vordefinierte Datentypen haben.
- Bsp: Haskell, Lean, Scheme, LISP und viele mehr.

Anwendung - Funktionale Programmierung

- Programmiersprachen, die Funktionen als vordefinierte Datentypen haben.
- Bsp: Haskell, Lean, Scheme, LISP und viele mehr.
- Es gibt Erweiterungen von C++, Python, Java/Kotlin, die diese Funktionalität nachbauen (Stichwort λ-Calculus).

Anwendung - Funktionale Programmierung

- Programmiersprachen, die Funktionen als vordefinierte Datentypen haben.
- Bsp: Haskell, Lean, Scheme, LISP und viele mehr.
- Es gibt Erweiterungen von C++, Python, Java/Kotlin, die diese Funktionalität nachbauen (Stichwort λ-Calculus).
- Anwendung: mathematische Beweisassistenten - engl. "Proof-Checker".

Anwendung - Funktionale Programmierung

Beispiele für interne Datentypen:

- $\mathbb{N}$: `zero`: *, `Succ`: $* \to *$

Anwendung - Funktionale Programmierung

Beispiele für interne Datentypen:

- $\mathbb{N}$: `zero: *`, `Succ:` $* \to *$
- `bool`: `true: *`, `false: *`

Anwendung - Funktionale Programmierung

Beispiele für interne Datentypen:

- $\mathbb{N}$: `zero: *`, `Succ:` $* \to *$
- `bool`: `true: *`, `false: *`
- `tree`: `-: *` , `branch:` $* \to (* \to *)$

Anwendung - Funktionale Programmierung

Beispiele für interne Datentypen:

- $\mathbb{N}$: `zero: *`, `Succ:` $* \to *$
- `bool`: `true: *`, `false: *`
- `tree`: `-: *` , `branch:` $* \to (* \to *)$
- `list(`α`)`: `[]: *`, `append:` $\alpha \to (* \to *)$.

Funktionen höherer Ordnung

In Haskell, LISP usw. gibt es vorgefertigte Funktionen, die als Eingabe erneut Funktionen nehmen.

Beispiele (Haskell):

- `map ::` $(\alpha \to \beta) \to$ `list`$(\alpha \to$`list`(β)
  ```
  map f [] = []
  map f (append x l) = append (f x) (map f l)
  ```
- Ableitungsfunktion `derive` nimmt als Eingabe eine Funktion und gibt deren Ableitung aus.

Algebren

Intuition

Eine Algebra ist eine Menge zusammen mit Operationen wie $+$, *.

Algebren

Intuition

Eine Algebra ist eine Menge zusammen mit Operationen wie $+$, *.

Beispiel: `Bool` ist eine Algebra.

Intiale Objekte

Definition

Ein Objekt c in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt initial, genau dann wenn für jedes $d \in \mathcal{C}$ gilt, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \neq \emptyset$ ist.

Intiale Objekte

Definition

Ein Objekt c in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt initial, genau dann wenn für jedes $d \in \mathcal{C}$ gilt, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \neq \emptyset$ ist.

Beispiel: $0 \in \mathbb{N}$ ist ein initiales Objekt.

Intiale Objekte

Definition

Ein Objekt c in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt initial, genau dann wenn für jedes $d \in \mathcal{C}$ gilt, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \neq \emptyset$ ist.

Beispiel: $0 \in \mathbb{N}$ ist ein initiales Objekt.

Lemma

$\mathtt{Bool}$, $\mathbb{N}$ usw. sind initiale Objekte bestimmter Kategorien von Algebren [AW22].

Angereicherte Kategorien

Definition

Sei $\mathcal{V}$ eine kleine Kategorie in der es eine "Multiplikation" gibt. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt angereichert in $\mathcal{V}$, wenn es für alle $c, d \in \mathcal{C}$ ein Objekt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \in \mathcal{V}$ gibt.

Angereicherte Kategorien

Definition

Sei $\mathcal{V}$ eine kleine Kategorie in der es eine "Multiplikation" gibt. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt angereichert in $\mathcal{V}$, wenn es für alle $c, d \in \mathcal{C}$ ein Objekt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \in \mathcal{V}$ gibt.

Beispiel:

Jede bisherige Kategorie war angereichert in **Set**.

Angereicherte Kategorien

Definition

Sei $\mathcal{V}$ eine kleine Kategorie in der es eine "Multiplikation" gibt. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt angereichert in $\mathcal{V}$, wenn es für alle $c, d \in \mathcal{C}$ ein Objekt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \in \mathcal{V}$ gibt.

Beispiel:
Jede bisherige Kategorie war angereichtert in **Set**.

Beobachtung

Eine Präordnung ist das gleiche, wie eine in `Bool`-angereicherte Kategorie.

Kategorientheorie ist mehr als nur Diagramme malen!

Kategorientheorie ist mehr als nur Diagramme malen!

Lemma

Yoneda-Einbettung Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $c \in \mathcal{C}$.
*Die Zuordnung $\mathrm{Hom}(c, -) : \mathcal{C} \to$ **Set** ist eine "zulässige Abbildung zwischen Kategorien"*

Kategorientheorie ist mehr als nur Diagramme malen!

Lemma

Yoneda-Einbettung Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $c \in \mathcal{C}$.
*Die Zuordnung $\mathrm{Hom}(c, -) : \mathcal{C} \to$ **Set** ist eine "zulässige Abbildung zwischen Kategorien"*

Yoneda Lemma

"$\mathrm{Hom}(c, -)$ beschreibt ein genaues Abbild von $\mathcal{C}$ in der Kategorie der Abbildungen von $\mathcal{C}$ nach **Set**."

Kategorientheorie ist mehr als nur Diagramme malen!

Lemma

Yoneda-Einbettung Sei $\mathcal{C}$ *eine Kategorie und* $c \in \mathcal{C}$.
Die Zuordnung $\mathrm{Hom}(c, -) : \mathcal{C} \to$ **Set** *ist eine "zulässige Abbildung zwischen Kategorien"*

Yoneda Lemma

"$\mathrm{Hom}(c, -)$ beschreibt ein genaues Abbild von $\mathcal{C}$ in der Kategorie der Abbildungen von $\mathcal{C}$ nach **Set**."

Folgerung

Eine Menge wird eindeutig von den Abbildungen in diese Menge beschrieben.

Kategorientheorie ist mehr als nur Diagramme malen!

Lemma

Yoneda-Einbettung Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $c \in \mathcal{C}$.
Die Zuordnung $\mathrm{Hom}(c, -) : \mathcal{C} \to$ **Set** *ist eine "zulässige Abbildung zwischen Kategorien"*

Yoneda Lemma

"$\mathrm{Hom}(c, -)$ beschreibt ein genaues Abbild von $\mathcal{C}$ in der Kategorie der Abbildungen von $\mathcal{C}$ nach **Set**."

Folgerung

Eine Menge wird eindeutig von den Abbildungen in diese Menge beschrieben.
"Relationen/Abbildungen zu studieren ist das gleiche, wie die Objekte selbst zu studieren."

Kategorientheorie ist mehr als nur Diagramme malen!

Lemma

Yoneda-Einbettung Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $c \in \mathcal{C}$.
Die Zuordnung $\mathrm{Hom}(c, -) : \mathcal{C} \to$ **Set** *ist eine "zulässige Abbildung zwischen Kategorien"*

Yoneda Lemma

"$\mathrm{Hom}(c, -)$ beschreibt ein genaues Abbild von $\mathcal{C}$ in der Kategorie der Abbildungen von $\mathcal{C}$ nach **Set**."

Folgerung

Eine Menge wird eindeutig von den Abbildungen in diese Menge beschrieben.
"Relationen/Abbildungen zu studieren ist das gleiche, wie die Objekte selbst zu studieren."
"Zeig mir deine Freunde und ich sag dir wer du bist" [Bra16]

Kategorientheorie ist mehr als nur Diagramme malen!

Lemma

Yoneda-Einbettung Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $c \in \mathcal{C}$.
*Die Zuordnung $\mathrm{Hom}(c, -) : \mathcal{C} \to$ **Set** ist eine "zulässige Abbildung zwischen Kategorien"*

Yoneda Lemma

"$\mathrm{Hom}(c, -)$ beschreibt ein genaues Abbild von $\mathcal{C}$ in der Kategorie der Abbildungen von $\mathcal{C}$ nach **Set**."

Folgerung

Eine Menge wird eindeutig von den Abbildungen in diese Menge beschrieben.
"Relationen/Abbildungen zu studieren ist das gleiche, wie die Objekte selbst zu studieren."
"Zeig mir deine Freunde und ich sag dir wer du bist" [Bra16]

Das gilt auch für angereichterte Kategorien. Siehe Yoneda-Lemma für

Historische Anwendung: Die Kategorie der topologischen Räume **Top**

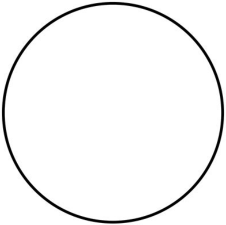


Abbildung 1: Kreis

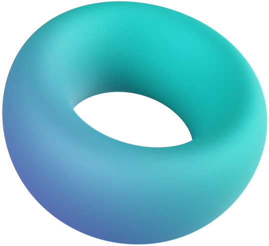


Abbildung 2: Torus

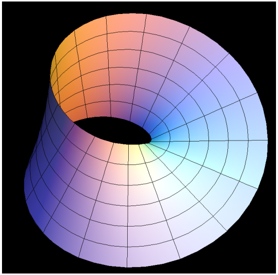


Abbildung 3: Möbius Band

Die Kategorie der topologischen Räume **Top**

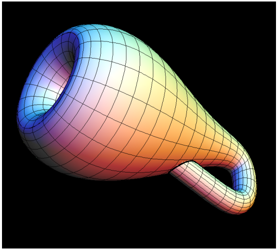


Abbildung 4: Kleinssche Flasche

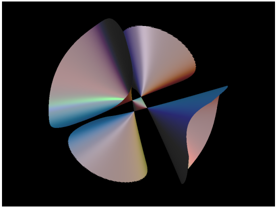


Abbildung 5: Cayley's kubische Fläche

$$wxy + xyz + yzw + zwx = 0$$

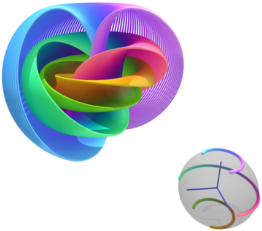


Abbildung 6: Hopf Faserung

Warum ist **Top** interessant?

Physik

Warum ist **Top** interessant?

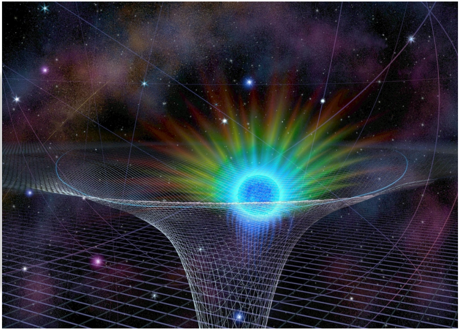
Physik

- Raum-Zeit ist vierdimensional.

Warum ist **Top** interessant?

Physik

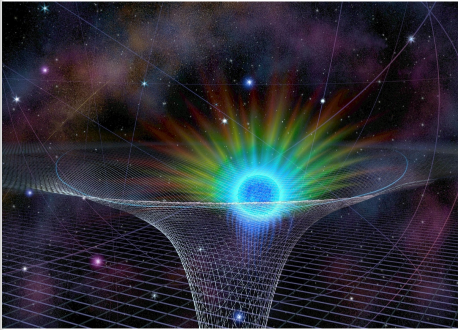
- Raum-Zeit ist vierdimensional.
- Einstein: Raum-Zeit ist "gekrümmt" und sieht nur ortsweise wie ein vierdimensionaler Raum aus.



Warum ist **Top** interessant?

Physik

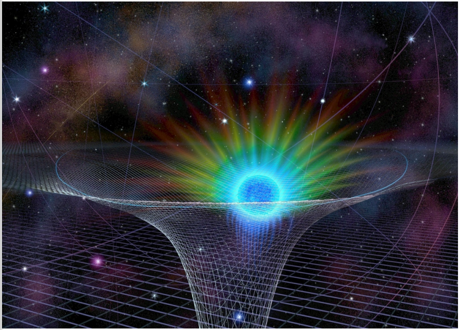
- Raum-Zeit ist vierdimensional.
- Einstein: Raum-Zeit ist "gekrümmt" und sieht nur ortsweise wie ein vierdimensionaler Raum aus.
- Je nachdem was man mit einbezieht auch höher dimensional.
  z.B String-Theorie: Modelle mit 10 Dimensionen und mehr.



Warum ist **Top** interessant?

Physik

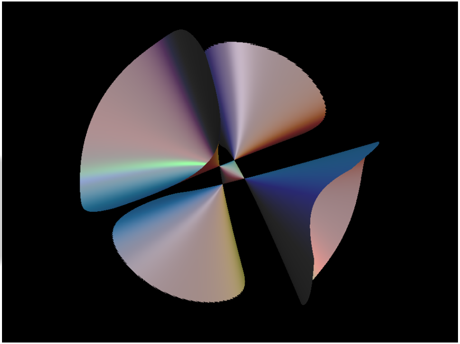
- Raum-Zeit ist vierdimensional.
- Einstein: Raum-Zeit ist "gekrümmt" und sieht nur ortsweise wie ein vierdimensionaler Raum aus.
- Je nachdem was man mit einbezieht auch höher dimensional.
  z.B String-Theorie: Modelle mit 10 Dimensionen und mehr.
- Debatte um die Form des Universums ist noch lange nicht vorbei.



Warum ist **Top** interessant

Algebraische Geometrie

Nullstellen von Gleichungen geben oft schwierige geometrische Formen



$$wxy + xyz + yzw + zwx = 0$$

Wann sind Objekte "gleich"?

Wann sind Objekte "gleich"?

Definition (Isomorphismen)

Zwei Objekte $A, B \in \mathcal{C}$ nennt man isomorph genau dann wenn es Abbildungen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ gibt, sodass gilt: $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$.

Wann sind Objekte "gleich"?

Definition (Isomorphismen)

Zwei Objekte $A, B \in \mathcal{C}$ nennt man isomorph genau dann wenn es Abbildungen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ gibt, sodass gilt: $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$.

Beispiele:

- Zwei Zahlen in $\mathbb{N}$ sind isomorph genau dann, wenn sie gleich sind.
- Zwei endliche Mengen in **Set** sind isomorph genau dann, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen haben.

Verformungen in **Top**

Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ in der Kategorie **Top** die durch eine "fließende" Verformung erreicht wird, nennt man Homotopie-Äquivalenz. Man sagt die Räume X und Y sind homotop zueinander.

Verformungen in **Top**

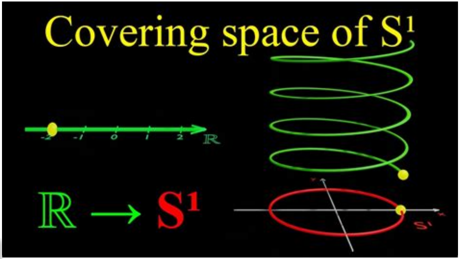
Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ in der Kategorie **Top** die durch eine "fließende" Verformung erreicht wird, nennt man Homotopie-Äquivalenz. Man sagt die Räume X und Y sind homotop zueinander.

Skizze einer Definition

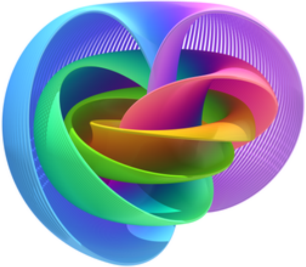
Sei **hTop** die Kategorie mit Objekten von **Top**, deren Isomorphismen genau die Homotopie-Äquivalenzen hat. D.h. zwei Objekte in **hTop** sind gleich, wenn sie durch Verformung ineinander überführt werden können.

Wozu das ganze?



Theorem (Klassifikation von Überdeckungen)

Theorem (Klassifikation von Hauptfaserbündeln)



Weitere komplizierte Anwendungen

Weitere komplizierte Anwendungen

Mengenlehre

Kategorientheorie stellt "beinahe" eine neue Basis für Mathematik dar. Genauer, kann "fast" die **ZFC**-Mengenlehre ersetzen.

Weitere komplizierte Anwendungen

Mengenlehre

Kategorientheorie stellt "beinahe" eine neue Basis für Mathematik dar. Genauer, kann "fast" die **ZFC**-Mengenlehre ersetzen.

Physik

Aktuelle Forschung versucht eine passende Sprache/Mathematik für sog. Quantenfeldtheorien zu finden. Alle Versuche basieren auf Kategorientheorie.

Weitere komplizierte Anwendungen

Mengenlehre

Kategorientheorie stellt "beinahe" eine neue Basis für Mathematik dar. Genauer, kann "fast" die **ZFC**-Mengenlehre ersetzen.

Physik

Aktuelle Forschung versucht eine passende Sprache/Mathematik für sog. Quantenfeldtheorien zu finden. Alle Versuche basieren auf Kategorientheorie.

Logik

Die sogennante Homotopie-Type-Theorie benutzt **HTop** um Typentheorie neu zu formulieren.

Danke für eure Aufmerksamkeit!!

Ein paar Bücher [Mac13] , [Rie17]

[AW22] Benedikt Ahrens und Kobe Wullaert. *Category Theory for Programming*. 2022. arXiv: 2209.01259.

[Bra16] Martin 1987- Brandenburg. *Einführung in die Kategorientheorie : Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen*. Berlin u.a.: Springer Spektrum, 2016. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-47068-8.

[Che22] Eugenia Cheng. *The Joy of Abstraction: An Exploration of Math, Category Theory, and Life*. Cambridge University Press, 2022.

[FS19] Brendan Fong und David I. Spivak. *An Invitation to Applied Category Theory: Seven Sketches in Compositionality*. Cambridge University Press, 2019.

[Mac13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Bd. 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[Rie17] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017. URL: https://math.jhu.edu/~eriehl/context/.