SK_1 of affine curves over finite fields vanishes

Leon Schropp
held in 2023 in the Seminar "Algebraic K-Theory",
organised by Andreas Rosenschon

March 10, 2025

In 2023, I gave a talk titled "SK1 of Affine Curves over Finite Fields Vanishes," which focused on the corresponding result by Nestler[1]. The talk was a great opportunity for me to explore explicit results in K-theory, while relying primarily on algebraic techniques. Unfortunately, I haven't had the chance to type up my notes yet, and they are currently only available in German. I plan to update this in the near future.

As this seminar was aimed at both Bachelor's and Master's students, I have worked out most of the arguments in considerable detail. I kindly ask for the understanding of more advanced readers in this regard. As always, any suggestions for improvement are greatly appreciated. Please feel free to send them to `leon.schropp@t-online.de`.

[1]See e.g. `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869399981875`

Fakten:

~~Fakt 0~~ Fakt 0 [Bass-Milnor-Serre]: $Sk_1(Y) = 0$ für Y glatte affine Kurve / endl. Kp. K.

Fakt 1: R komm., semilokal (z.B. R Artinsch), dann ist $Sk_1(R) = 0$

~~Fakt 2: Sei R endl. erz. K-Algebra, $L/Q(R)$ endl.~~

Fakt 2: Sei R endl. erz. K-Alg und Integritätsbereich. Sei $Q(R)$ Quotientenkp., $L/Q(R)$ endl. Kp. erweiterung. Sei S ganzer Abschluss v. R in L. Dann ist S endl. erzeugtes R-Modul, insbesondere S endl. erz. K-Algebra.

Fakt 3 [Dennis, Stein][75] $K_2(L[X]/X^a) = 0$ für L endl. Kp., $a \geq 1$.

Fakt 5: Sei R noeth. + reduziert, $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale v. R. Sei S_i d. ganze Abschluss v. $R/\mathfrak{p}_i$ in $Q(R/\mathfrak{p}_i)$, dann ist d. ganze Abschl. v. R in $Q(R)$ gegeben durch $S = \prod_{i=1}^{r} S_i$.

Fakt 4 (Spezialfall Hensel's Lemma): Für $\mathfrak{m} \subseteq R$ max Id., $F \in R[X]$ $p, q \in (R/\mathfrak{m})[X]$ mit p normiert gibt es eindeutige $P, Q \in R[X]$, P normiert, sodass $F = P \cdot Q$ und $\overline{P} = p$, $\overline{Q} = q$.

K Thry I

Ziel [Nestler][2000]: Für jede aff. Kurve $X = \mathrm{Spec}(A)$ über endl. Kp k

(d.h. A endl. erz. k-Algebra mit $\dim(A) = 1$)

gilt $SK_1(X) := SK_1(A) = 0$

(Ab jetzt: A, k immer obige Def) K ~~(R~~ bel. Kp, R komm. Ring)

<u>Bekannt</u>: [Milnor][68]: $SK_1(\mathbb{R}[X,Y]/(X^2-Y^2-1)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

und $K_2(K) \neq 0 \Rightarrow SK_1(K[X,Y]/(X^2-Y^3-XY)) \neq 0$ *

Nestler $\Rightarrow K_2(k) = 0$ für k endl. Kp!

[Bass-Milnor-Serre][67] $\overset{2.3}{\rightsquigarrow} SK_1(B) = 0$ f. B Dedekind + endl. erz. k-Algebra

(da für Schema Y / perfekten Kp K: Y glatt $\Leftrightarrow$ Y lokal endl. + regulär)

$\Leftrightarrow SK_1(Y) = 0$ f. Y glatte aff. Kurve $/k$.

[Krusemeyer][84]: $SK_1(k[X,Y]/(X^2-Y^2)) = 0$ $\rightsquigarrow$ Frage [K]: Immer so? $\Rightarrow$ N: Ja!

<u>Bem</u>: Da für R komm $0 \to SK_1(R) \to K_1(R) \to R^\times \to 0$ spaltet llf

$\Rightarrow K_1(A) = SK_1(A) \oplus A^\times = A^\times$.

<u>Lemma 1</u>: Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Ideal s.d. $\forall x \in \mathfrak{p}: (1+x) \in R^\times$.

Dann $SK_1(R) = SK_1(R/\mathfrak{p})$.

<u>Bem</u>: z.B. $\mathfrak{p} = J(R)$, $Nil(R)$:

n.Def $\forall x \in Nil(R)\ \exists n \in \mathbb{N}: x^n = 0$ und $p \in \mathbb{N}: n \leq 2^p$.

$\Rightarrow (1+x)(1-x)\prod_{k=1}^{p-1}(1+x^{2^k}) = 1 - x^{2^p} = 1$

Ziel: $\rightsquigarrow$ O.E. sei A reduziert (sonst $A/Nil(A)$).

<u>Beweis</u>: $\pi: R \to R/\mathfrak{p}$ induziert $\pi: SL(R) \to SL(R/\mathfrak{p})$.

Wegen $\pi(e_{ij}(r)) = e_{ij}(\bar{r}) \in E(R/\mathfrak{p})$ also auch $\pi: SK_1(R) \to SK_1(R/\mathfrak{p})$.

<u>Surj</u>: Sei $\bar{M} = (\overline{m_{ij}})_{ij} \in SL(R/\mathfrak{p}) \Rightarrow$ Für $M := (m_{ij})_{ij}$ ist $\pi(M) = \bar{M}$.

Wegen $\det(\bar{M}) = \bar{1}$, gibt es $x \in \mathfrak{p}$ mit $\det(M) = 1 + x \in R^\times$

Sei $M' := \mathrm{diag}((1+x)^{-1}, 1, \ldots, 1)M$, dann ist $\pi(M') = \bar{M}$

und $\det(M') = 1 \Rightarrow M' \in SL(R)$.

K Thry II

<u>Inj</u>: Sei $\pi_n : SL_n(R) \to SL_n(R/\mathfrak{p}) / E_n(R/\mathfrak{p})$. Wegen $SL_1(R) = (1) = E_1(R)$ genügt z.z. $\ker(\pi_n) = E_n(R)\ker(\pi_{n-1})$. $\forall n > 1$.

Sei $M \in \ker(\pi_n)$. O.E. sei $\pi(M) = \begin{pmatrix} \bar{1} & & \ast & \bar{x}_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \bar{x}_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{Surj.}}{\Rightarrow} \exists\, p_{ij} \in \mathfrak{p},\ 1 \le i,j \le n$: $M = \begin{pmatrix} 1+p_{11} & & \ast & x_1 + p_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & x_{n-1} + p_{n-1n} \\ (p_{ij}) & & & 1 + p_{nn} \end{pmatrix}$

für $x_i \in R$.

- Wegen $(1+q) \in R^\times$ $\forall q \in \mathfrak{p}$ gilt dann:

$$M \overset{e_{ij} \in E_n(R)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1+q_1 & & \ast & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (p_{ij}) & & 1+q_{n-1} & 0 \\ & & & 1+p_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } q_i = \underbrace{p_{ii} - \left(\frac{x_i + p_{ni}}{1+p_{nn}}\right) p_{ni}}_{\in \mathfrak{p}}$$

$$\Big\downarrow e_{ij}$$

- $$\begin{pmatrix} 1+q_1 & & \ast & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (p_{ij}) & & 1+q_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1+p_{nn} \end{pmatrix} =: M'.$$

Da $\forall A \in GL_n(R)$: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$, folgt $\underbrace{\operatorname{diag}(1, \ldots 1, (1+p_{nn}), (1+p_{nn})^{-1})}_{\in E_n(R)}$

$\Rightarrow \operatorname{diag}(1 \ldots (1+p_{nn}), (1+p_{nn})^{-1}) M' = \begin{pmatrix} 1+q_1 & & \ast & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (p_{ij}) & & 1+q_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \ker(\pi_{n-1})$ $\square$

<u>Bem</u>: im Allg. gilt $K_1(R) \neq K_1(R/\mathfrak{p})$ (z.B. $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = Nil(R) = \{\bar{2}\}$.)

K Theory III

Zur Messung der Unterschiede zw. $K_1(R), K_1(R/I)$ gibt es eine exakte Seq.

Exakte Seq ("of a pair"): Für $I \subseteq R$ bel. Ideal:

$$\dots \to K_2(R) \to K_2(R/I) \xrightarrow{\partial} K_1(R,I) \to K_1(R) \to K_1(R/I) \xrightarrow{\partial} K_0(R,I) \to K_0(R)$$

$$K_1(R,I) = \frac{\ker(GL(R) \to GL(R/I))}{ncl_{GL}(\langle e_{ij}(x) \in E(R) \mid x \in I \rangle)}$$

$$K_0(R,I) = \ker(K_0(D(R,I)) \to K_0(R))$$

$$D(R,I) = \{(x,y) \in R \times R : x - y \in I\}$$

Lemma 2: Sei $\cancel{X} = \mathrm{Spec}(R)$ reduziert und $X = V(J_0) \sqcup V(J_1)$.
Dann ist $R = R/J_0 \times R/J_1$.

Bem: ~~Wenn X A $\bigcap_{i=1}^{n} V(J_i)$ zw~~
Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $V(J_1), \dots V(J_n)$ Zsmhangskomponenten, dann ist $Sk_1(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} Sk_1(A/J_i) \implies$ Genügt z.z. $Sk_1(A) = 0$ für A zsmhängend

Beweis: per Ann. $\emptyset = V(J_0) \cap V(J_1) = V(J_0 + J_1) \implies J_0 + J_1 = R$
und $X = V(J_0) \cup V(J_1) = V(J_0 J_1) \implies J_0 J_1 \subseteq Nil(R) = (0)$

Chin. Restsatz $\implies \exists\, \varphi : R \twoheadrightarrow R/J_0 \times R/J_1$ surj
mit $\ker(\varphi) = J_0 J_1 \subseteq (0) \implies \varphi$ iso. $\square$

Mayer-Vietoris-Seq.: Sei $R \xrightarrow{f} S$ Ringhom., $I \subseteq S$ Ideal, s.d.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ R/f^{-1}(I) \arrow[r] & S/I \end{tikzcd}$$

kartesisch ("pullback") ist. (d.h $f|_{f^{-1}(I)}$ iso. $\leadsto I := f^{-1}(I)$)

Dann ist (die folgende Sequenz) exakt:

$$K_2(R) \xrightarrow{\Delta} K_2(R/I) \oplus K_2(S) \xrightarrow{\pm} K_2(S/I) \xrightarrow{\partial} K_1(R) \xrightarrow{\Delta} K_1(R/I) \oplus K_1(S) \to \dots \quad \text{exakt.}$$

K Theory IV

Bem. Vor. erfüllt wenn
z.B. $S = R/J$ für $I \cap J = 0$ oder $R \subseteq S \subseteq O(R)$ endl. Erw.
und $I := \{x \in R \mid xS \subseteq R\}$ "Leitideal".

Bew (Skizze): Es gilt $K_1(R,I) = K_1(S,I)$ ("excision")
und

$$\begin{tikzcd}
K_2(R,I) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\text{Fakt}"'] & K_2(R) \arrow[r] \arrow[d] & K_2(R/I) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & K_1(R,I) \arrow[r] \arrow[d, equals] & K_1(R) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R/I) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
K_2(S,I) \arrow[r] & K_2(S) \arrow[r] & K_2(S/I) \arrow[r, "\partial"] & K_1(S,I) \arrow[r] & K_1(S) \arrow[r] & K_1(S/I) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Kommutat. Diagram-chasing $\Rightarrow$ □.

Bem: Es gibt SK_1 Version von M.V.:

$$\cdots \to K_2(S/I) \xrightarrow{\partial} SK_1(R) \to SK_1(R/I) \oplus SK_1(S) \to \cdots$$

Theorem (Ziel): Für $X = \mathrm{Spec}(A)$ Kurve / k (endl. K_p) gilt: $SK_1(X) = 0$.

Bew: O.E. A reduziert und zusammenhängend.
Sei B ganze Abschluss v. A in $Q(A)$. $I \subseteq B$ das Leitideal v. B/A

M.V. $\Rightarrow$ z.z. 1. $SK_1(A/I) = 0$ 2. $SK_1(B) = 0$ 3. $K_2(B/I) = 0$.

Fall 1: X irreduzibel d.h. A Integer.:

1. Fakt 1 $\Rightarrow$ B endl. erz A-Mod $\Rightarrow$ B noeth.
Noether-N. $\Rightarrow$ $\dim B = \dim A = 1$ $\Rightarrow$ B Dedekind $\overset{BMS}{\Longrightarrow}$ $SK_1(B) = 0$

2. $(0) \subsetneq I$, da für $B = \langle \frac{a_1}{a_1'}, \dots \frac{a_n}{a_n'} \rangle_A$ gilt: $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i'\right) \in I$

A $\overset{\text{Intb.}}{\Longrightarrow}$ $\dim A/I = 0$ $\Rightarrow$ A/I artinsch $\overset{\text{Fall 2}}{\Longrightarrow}$ $SK_1(A/I) = 0$.

3. B Ded. $\Rightarrow$ $I = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i^{a_i}$ für $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(B) \setminus \{(0)\}$, $a_i \geq 1$.

CRS $\Rightarrow$ $B/I \cong \prod_{i=1}^{n} B/\mathfrak{p}_i^{a_i}$ $\overset{K_2}{\Longrightarrow}$ $K_2(B/I) = \bigoplus_{i=1}^{n} K_2(B/\mathfrak{p}_i^{a_i})$

Genügt z.z. $K_2(B/\mathfrak{p}_i^{a_i}) = 0$ $\forall i$

KThy V

Sei $L_i := B/\mathfrak{p}_i$ ($\Rightarrow L_i$ Kp.) . Dann

B endl. erz. k-Alg. $\Rightarrow L_i$ endl. erz. k Algebra.

Noether-N. + $\dim L_i = 0 \Rightarrow L_i/k$ ganz u. endl. $\Rightarrow L_i$ endl. Kp

und L_i/k galoisch (insb. seperabel.)

z.z. $L_i[X]/(X^{a_i}) \cong B/\mathfrak{p}_i^{a_i}$ $\forall$:

(Dann gilt $K_2(B/\mathfrak{p}_i^{a_i}) = K_2(L_i[X]/X^{a_i}) \overset{\text{Edit 3}}{=} 0$). Sei $L := L_i, \mathfrak{p} := \mathfrak{p}_i, a := a_i$

Sei $\pi : B/\mathfrak{p}^a \twoheadrightarrow L = B/\mathfrak{p}$ proj. v. k-Alg.. L sep $\Rightarrow \exists\, \theta \in L: L = k(\theta)$.

Sei $F \in k[X]$ MiPo v. θ.

F zerf. in Linearfaktoren in $L \Rightarrow F = (X-\theta)g$ für ein $g \in L[X]$

mit g koprim zu $(X-\theta)$.

F4 (Hensel) $\Rightarrow \exists\, H, G \in B/\mathfrak{p}^a[X]$, H normiert : $F = H \cdot G$

und $\pi(H) = X - \theta$, $\pi(G) = g$.

$\overset{H \text{ norm.}}{\Rightarrow}$ $H = X - \theta'$ für ein $\theta' \in B/\mathfrak{p}^a$ mit $\pi(\theta') = \theta$.

$$\varphi: L \cong k[X]/(F) \longrightarrow B/\mathfrak{p}^a \quad \text{ist ein wohld. Schnitt zu } \pi.$$
$$X \longmapsto \theta'$$

Sei $t \in B$, sodass $(t) = \mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ das max. Ideal von $B_\mathfrak{p}$ ist.

$\Rightarrow L[X] \to B/\mathfrak{p}^a$ hat ker $= (X^a)$, da $t^a \in \mathfrak{p}^a$, aber
$X \mapsto t$ $\qquad t^k \notin \mathfrak{p}^a$ $\forall k \leq a-1$.

$\Rightarrow \psi\, L[X]/(X^a) \to B/\mathfrak{p}^a$ inj.

<u>Surj</u>: Sei $b \in B/\mathfrak{p}^a$ und $\lambda_0 := \varphi \circ \pi(b)$, dann ist

$\pi(b - \lambda_0) = 0$ d.h. $b - \lambda_0 \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^a \Rightarrow \exists\, b_1 \in B/\mathfrak{p}^a : b - \lambda_0 = b_1 \bar{t}$

Gleiches Vorgehen für b_1 liefert $\lambda_1, b_2 \in B/\mathfrak{p}$: $b_1 - \lambda_1 = b_2 \cdot \bar{t}^2$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_0, \dots, \lambda_n \in B/\mathfrak{p}^a$: $b = \sum_{j=1}^{a-1} \lambda_j \bar{t}^j$

V. Thm VI

Fall 2: X reduzibel:

1. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_r$ min Primideale v. A.

Fall 4 $\overset{\text{Anal}}{\Rightarrow}$ $B = \prod_{i=1}^{r} B_i$ für B_i ganzer Abschluss v. $A/\mathfrak{p}_i$ in $Q(A/\mathfrak{p}_i)$.

Fall 1 + N.N. $\Rightarrow$ B_i Dedekind $\Rightarrow$ $Sk_1(B) = \bigoplus_{i=1}^{r} Sk_1(B_i) \overset{\text{BMS}}{=} 0$

2. Es gilt $ht(I) + \dim A/I \leq \dim A = 1$.

Ang $ht(I) = 0 \Rightarrow I \subseteq \mathfrak{p}_i$ für ein $1 \leq i \leq r$.

Beh.: $\mathfrak{p}_i$ enthält nur Nullteiler.

Sei $a \in \mathfrak{p}_i$, dann $\exists t \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ mit $t \notin \mathfrak{p}_i$.

(ansonsten ist $\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_i \Rightarrow \mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_i$ für ein j ↯)

$\Rightarrow t \neq 0$ und $a \cdot t \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i \overset{\text{red}}{=} (0)$.

aber $I \ni \prod_{i=1}^{u} a_i'$ für $B = \langle \frac{a_1}{a_1'}, \dots \frac{a_u}{a_u'} \rangle_A \Rightarrow \prod_{i=1}^{u} a_i'$ ist kein Nullteiler!

$\Rightarrow ht(I) = 1. \Rightarrow \dim(A/I) = 0 \Rightarrow A/I$ artinsch. $\Rightarrow Sk_1(A/I) = 0$.

3. Sei $J_i := I/\mathfrak{p}_i$, $ht(I) = 1 \Rightarrow J_i \neq 0$

Da $B/I = \prod_{i=1}^{r} B_i/J_i$ gilt $K_2(B/I) = \bigoplus_{i=1}^{r} K_2(\underbrace{B_i/J_i}) = 0$

Quotient v. Dedekindring mit $J_i \neq 0$

K Thry Extra

Noether-N. + $\dim L_i = 0 \Rightarrow L_i/k$ ganz und. endl.

$\Rightarrow L_i$ endl. $K_p \Rightarrow L_i/k$ galoisch

z.z. $L_i[X]/X^{a_i} \cong B/\mathfrak{p}_i^{a_i} \quad \forall i$

(Dann gilt: $K_2(B/\mathfrak{p}^{a_i}) = K_2(L_i[X]/X^{a_i}) \overset{\text{Teil 3}}{=} 0$)

$L := L_i,\ \mathfrak{p} := \mathfrak{p}_i,\ a := a_i$.

Sei $\pi: B/\mathfrak{p}^a \twoheadrightarrow L = \underset{\text{proj}}{B/\mathfrak{p}}$ proj. v. k-Algebren

L sep $\Rightarrow \exists\, \theta \in L : L = k(\theta)$. Sei $F \in k[X]$ M:Po v. θ.

F zerf. in Linearfakt in $L \Rightarrow F = (X-\theta)\, g$ für $g \in L[X]$ kopim zu $X-\theta$.

Hensel $\Rightarrow \exists\, H, G \in B/\mathfrak{p}^a[X]$ mit H normiert: $F = H \cdot G$, $\pi(H) = X - \theta$, $\pi(G) = g$.

$\Rightarrow H = X - \theta'$ für ein $\theta' \in B/\mathfrak{p}^a$ mit $\pi(\theta') = \theta$.

d.h. ~~$\pi(F(\theta')) = F(\theta) = 0$~~.

$$\Rightarrow \varphi : L \cong k[X]/(F) \longrightarrow B/\mathfrak{p}^a \quad \text{ist wohl-def. Schnitt zu } \pi.$$
$$X \longmapsto \theta'$$

Sei dann $t \in B$, sodass $(t) = \mathfrak{p} B_\mathfrak{p}$ das max Ideal v. $B_\mathfrak{p}$ ist.

$$\Rightarrow L[X] \longrightarrow B/\mathfrak{p}^a \quad \text{hat } \ker = (X^a), \text{ da } t^a \in \mathfrak{p}^a, \text{ aber}$$
$$X \longmapsto t \qquad t^k \notin \mathfrak{p}^a \ \forall k \leq a-1$$

$\Rightarrow \varphi : L[X]/(X^a) \rightarrow B/\mathfrak{p}^a$ inj.

Surj: Sei $b \in B/\mathfrak{p}^a$ und $\lambda_0 := \varphi \circ \pi(b) \in B/\mathfrak{p}^a$, dann ist

$\pi(b - \lambda_0) = 0$ d.h. $b - \lambda_0 \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^a$.

$\Rightarrow \exists\, b_1 \in B/\mathfrak{p}^a : b - \lambda_0 = b_1 \cdot \bar{t}$

Das gleiche für b_1 liefert $\lambda_1, b_2 \in B/\mathfrak{p}^a$ sod. $b_1 - \lambda_1 = b_2 \cdot (\overline{t^2})$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_0, \dots, \lambda_n \in B/\mathfrak{p}^a : b = \sum_{i=0}^{a-1} \lambda_i t^i$